

1. cvičení - teorie

Věta 8 (Operace se spojitými funkcemi). Nechť $M \subset \mathbb{R}^n, x \in M, f: M \rightarrow \mathbb{R}, g: M \rightarrow \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$. Jestliže f a g jsou spojité v bodě x vzhledem k M , potom také funkce $c \cdot f, f + g$ a $f \cdot g$ jsou spojité v x vzhledem k M . Pokud navíc funkce g je nenulová v bodě x , pak je spojitá i funkce $\frac{f}{g}$ v bodě x vzhledem k M .

Věta 9 (Skládání spojitých funkcí). Nechť $r, s \in \mathbb{N}, M \subset \mathbb{R}^s, L \subset \mathbb{R}^r$ a $y \in M$. Nechť $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ jsou funkce definované na M , spojité v bodě y vzhledem k M a $[\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)] \in L$ pro každé $x \in M$. Nechť $f: L \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $[\varphi_1(y), \dots, \varphi_r(y)]$ vzhledem k L . Potom zložená funkce $F: M \rightarrow \mathbb{R}$ daná předpisem

$$F(x) = f(\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)), x \in M,$$

je spojitá v bodě y vzhledem k M .

Značení. Namísto $x \in \mathbb{R}^n: V(x)$, kde $V(x)$ je nějaká vlastnost pro bod $x \in \mathbb{R}^n$, budeme psát $[V(x)]$.

$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n: \rho(x, y) < r\} = [\rho(x, y) < r]$, kde ρ je euklidovská metrika na $\mathbb{R}^n$. Budeme ji nazývat otevřenou koulí o středu x a poloměru r .

Definice. Buď $M \subset \mathbb{R}^n$.

Bod $x \in \mathbb{R}^n$ je

- *vnitřní bod* množiny M , pokud $\exists r > 0: B(x, r) \subset M$
- *hraniční bod* množiny M , pokud $\forall r > 0: B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$.

Dále $\text{Int } M = [x \text{ je vnitřní bod mn. } M]$ je *vnitřek množiny* M a $H(M) = [x \text{ je hraniční bod mn. } M]$ je *hranice množiny* M . *Uzávěr* množiny M je množina $M \cup H(M)$, značíme ji $\overline{M}$.

Množina M je *otevřená* (v $\mathbb{R}^n$), jestliže je každý její bod zároveň vnitřním bodem. Množina M je *uzavřená* (v $\mathbb{R}^n$), jestliže $H(M) \subset M$ (respektive, pokud $\overline{M} = M$).

Poznámka. Body množiny M splňují první podmínku v definici hraničního bodu automaticky.

Věta 4 (Charakterizace uzavřených množin). Buď $M \subset \mathbb{R}^n$. Pak je ekvivalentní:

- Množina M je uzavřená.
- Množina $\mathbb{R}^n \setminus M$ je otevřená.
- Pokud posloupnost $\{x_n\}_n \subset M$ konverguje k x , pak $x \in M$.

Věta 2 (vlastnosti otevřených množin).

- Prázdná množina a $\mathbb{R}^n$ jsou otevřené v $\mathbb{R}^n$.
- Libovolné sjednocení otevřených množin je otevřená množina.
- Konečný průnik otevřených množin je otevřená množina.

Věta 5 (vlastnosti uzavřených množin).

- Prázdná množina a $\mathbb{R}^n$ jsou uzavřené v $\mathbb{R}^n$.
- Libovolný průnik uzavřených množin je uzavřená množina.
- Konečné sjednocení uzavřených množin je uzavřená množina.

Věta 6. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Potom platí:

- (i) Množina $\overline{M}$ je uzavřená v $\mathbb{R}^n$.
- (ii) Množina $\text{Int } M$ je otevřená v $\mathbb{R}^n$.
- (iii) Množina M je otevřená v $\mathbb{R}^n$, právě když $M = \text{Int } M$.

Množina $\text{Int } M$ je největší otevřená množina obsažená v M (tj. je-li G množina otevřená v $\mathbb{R}^n$ t. ž. $G \subset M$, pak $G \subset \text{Int } M$). Podobně M je nejmenší uzavřená množina obsahující M .

Věta 11. Nechť f je spojitá funkce na $\mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom platí:

- množiny $[f > c]$, $[f < c]$ jsou otevřené,
- množiny $[f \leq c]$, $[f \geq c]$, $[f = c]$ jsou uzavřené.

Poznámka. Je-li $M = [f \geq c]$, pak $[f = c]$ je zpravidla hranicí množiny M . Žádnou takovou větu jste však na přednášce neměli, proto je potřeba to v daném případě dokázat z definice.

Definice. Nech $n \in \mathbb{N}$. Množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ nazveme omezenou, pokud existuje $r > 0$ splňující $M \subset B(0, r)$.

Definice. Nech $n \in \mathbb{N}$. Množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ nazveme kompaktnou, pokud z každé postupnosti prvků množiny M víme vybrat konvergentní podpostupnost s limitou v M .

Věta 12. Nech $n \in \mathbb{N}$. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě wtedy když je uzavřená a omezená.

Návod (vizte vzorově vyřešený příklad 2 (f))

- Převést to na větu 11 - vyjádřit množinu M např. jako $[f > c]$ pro spojitou f apod.
- Využít věty 2 a 5 (průniky a sjednocení ot. a uz. množin).
- Určit hranici - obvykle je hranicí něco jako $[f = c]$.
- Pokud $H(M) \subset M$, pak je M uzavřená, pokud $H(M) \cap M = \emptyset$, pak je M otevřená. Jinak M není ani jedno.

Určení hranice

- Z definice
- Je-li $M = [f < c]$, pak je $[f = c]$ hranice. To se ukáže takto: zvolím $[x, y] \in [f = c]$ a $r > 0$ libovolně. Pak uvažuji $\delta \in (0, r)$ a ukážu, že $[x, y + \delta] \in M$ a $[x, y - \delta] \notin M$, nebo naopak. (případně pracuji s $[x \pm \delta, y]$). Tím dokážu, že $[f = c] \subset H(M)$. Potřebuji ještě ukázat, že ostatní body nejsou hraničními. Dále vím, že $[f > c]$ je ot. mn. Proto, pro $[x, y] \in [f > c]$ existuje $r > 0$ t.ž. $B([x, y], r) \subset [f > c]$, tedy $[x, y]$ nemůže být hraničním bodem.